1 Die binomischen Formeln

In der Schule betrachtet man die sogenannten binomischen Formeln. Es werden in der Regel drei Formeln betrachtet:

Begriff

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1}$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{2}$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \tag{3}$$

Die obigen Formeln werden erste, zweite bzw. dritte binomische Formel genannt.

1.1 Die erste binomische Formel

Wir wiederholen die Formel aus (1):

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Die Formel wirkt zunächst abschreckend, jedoch kann sie relativ unkompliziert hergeleitet werden:

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)$$

Wir lösen zunächst die erste Klammer auf.

$$= a \cdot (a+b) + b \cdot (a+b)$$

Jetzt lösen wir die beiden anderen Klammern auf.

$$\begin{aligned} &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot (a+b) \\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b \end{aligned}$$

Fassen wir nun die Formel zusammen.

$$\begin{aligned} &= a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2 \\ &= a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 \\ &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Jetzt ist es an der Zeit ein kleines Zahlenbeispiel zu bringen. Wir betrachten $(4+5)^2 = 9^2 = 81$. Jetzt berechnen wir dies mit der binomischen Formel:

$$(4+5)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 5^2 = 16 + 2 \cdot 20 + 25 = 81$$

1.2 Die zweite binomische Formeln

Wie man oben leicht erkennt, ist die zweite binomische Formel sehr ähnlich zur ersten. Auch diese wiederholen wir hier noch einmal:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Auch diese Formel leiten wir her, obwohl es sehr ähnlich zur ersten ist.

$$(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b)$$

Wir lösen zunächst die erste Klammer auf.

$$= a \cdot (a-b) - b \cdot (a-b)$$

Jetzt lösen wir die beiden anderen Klammern auf.

$$\begin{aligned}
&= a \cdot a + a \cdot (-b) - b \cdot (a-b) \\
&= a \cdot a - a \cdot b - b \cdot (a-b) \\
&= a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a \underbrace{-b \cdot (-b)}_{=+b^2}
\end{aligned}$$

Zuletzt fassen wir die Formel zusammen.

$$\begin{aligned}
&= a^2 - a \cdot b - b \cdot a + b^2 \\
&= a^2 - a \cdot b - a \cdot b + b^2 \\
&= a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\
&= a^2 - 2ab + b^2
\end{aligned}$$

Betrachten wir auch hier ein kleines Zahlenbeispiel. Betrachten wir nun $(5 - 8)^2 = (-3)^2 = 9$

$$(5-8)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 + 8^2 = 25 - 80 + 64 = 9$$

2 Die dritte binomische Formel

Diese Formel sieht ein wenig anders aus als die anderen beiden.

$$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$$

Auch diese Formel beweisen wir.

$$\begin{aligned}
(a-b) \cdot (a+b) &= a \cdot (a+b) - b \cdot (a+b) \\
&= a \cdot a + a \cdot b - b \cdot a - b \cdot b \\
&= a^2 + a \cdot b - a \cdot b - b^2 \\
&= a^2 - b^2
\end{aligned}$$

Natürlich kommt auch hier ein Zahlenbeispiel: $(8-5)\cdot(8+5) = 3\cdot 13 = 39$.

$$(8-5)\cdot(8+5) = 8^2 - 5^2 = 64 - 25 = 39$$

Wir bringen noch ein nützlicheres Beispiel:

$$(a-5)\cdot(a+5) = a^2 - 5^2 = a^2 - 25$$

Faustregel
Im obigen Text haben wir Zahlenbeispiele angegeben. Wenn es nicht gefordert wird (was Lehrer gerne tun), sollte man Berechnungen immer sofort ausführen, anstatt die binomische Formeln anzuwenden. Also, lieber $(5-3)^2 = 2^2 = 4$ ausrechnen, als die binomischen Formeln anwenden. Sinnvoll ist die Anwendung bei Aufgaben in denen Unbekannte (Variablen) in der Klammer stehen, z.B. $(a+3)^2 = a^2+6a+9$.

Weiterführende Informationen
Die erste und die zweite binomische Formel führen zu einer interessanten Ungleichung – die Young'sche Ungleichung.

$$|ab| \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

Der Beweis ist gar nicht so schwer. Entweder ist $a \cdot b$ größer gleich Null, oder kleiner als Null. Es gilt $a^2 \geq 0$ und $b^2 \geq 0$.

- Wenn $ab \geq 0$, dann gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq (a-b)^2 && \text{eine Zahl zum Quadrat ist immer größer als Null}\\
&= a^2 - 2ab + b^2 && \text{zweite bin. Formel, jetzt } +2ab \text{ rechnen}\\
2ab &\leq a^2 + b^2 && \mid :2\\
ab &\leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 && ab \geq 0 \text{ deshalb}\\
|ab| &\leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2
\end{aligned}$$

- Ist $ab < 0$, dann ist $-ab > 0$. Wir argumentieren ähnlich wie vorher:

$$\begin{aligned}
0 &\leq (a+b)^2\\
&= a^2 + 2ab + b^2 && \text{erste bin. Formel, jetzt } -2ab \text{ rechnen}\\
-2ab &\leq a^2 + b^2 && \mid :2\\
-ab &\leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 && -ab \geq 0 \text{ deshalb}\\
|ab| &\leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2
\end{aligned}$$

q.e.d.

2.1 Geometrische Interpretation

Für die erste binomische Formel gibt es eine sehr schöne geometrische Interpretation. Betrachten wir ein Quadrat mit der Kantenlänge $a+b$. Als Zahlenbeispiel kann man sich ein Quadrat mit der Kantenlänge 5cm vorstellen, unterteilt in die Längen 2cm und 3cm. Dadurch haben wir ein großes Quadrat mit 2cm + 3cm Kantenlänge.
Betrachten wir aber nun wieder das abstraktere Problem mit der Kantenlänge $a + b$. In dieses Quadrat kann man zwei kleine Quadrate mit der Kantenlänge a und der Kantenlänge b zeichnen. Übrig bleiben zwei Rechtecke, deren Fllacheninhalt $a \cdot b$ ist.
Das große Quadrat hat den Flächeninhalt $(a + b)^2$. Betrachten wir nun die Aufteilung des großen Quadrates in kleinere Quadrate und Rechtecke. Wir haben den den Flächeninhalt der zwei Quadrate, also a^2 sowie b^2. Und die Flächeninhalte der beiden Rechtecke, somit $2 \cdot a \cdot b$. Insgesamt gilt demnach die erste binomische Formel

$$\underbrace{(a+b)^2}_{\text{großes Quadrat}} = \underbrace{a^2}_{\text{1. kleines Quadrat}} + \underbrace{2ab}_{\text{die beiden Rechtecke}} + \underbrace{b^2}_{\text{2. kleines Quadrat}}$$

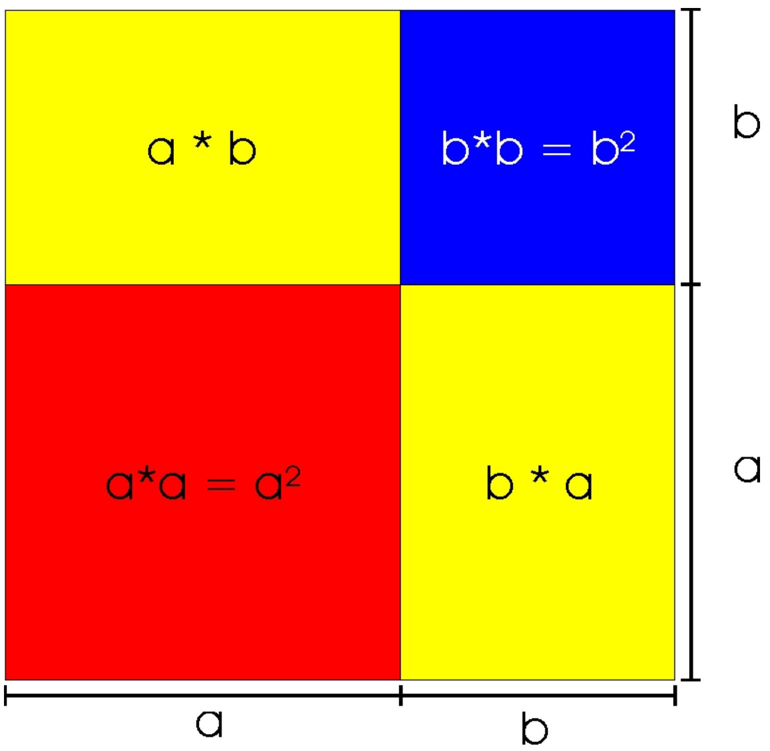

Abbildung 1: Geometrische Interpretation der ersten binomischen Formel