1 Das Additionsverfahren

Das Additionsverfahren wird auch zum Teil *Subtraktionsverfahren* genannt. Weitaus üblicher ist der Begriff *Gaußsches Eliminationsvefahren*, dieser Begriff wird meistens aber erst in der Oberstufe eingeführt.

1.1 Allgemeines zu Gleichungen

1.1.1 Multiplikation mit einem Faktor

Bislang haben wir Äquivalenzumforumgen nur zum Auflösen von Gleichungen benutzt. Also zum Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x &= 6 \quad | :2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Dies macht natürlich Sinn, wenn wir die Gleichung auflösen wollen. Es ist jedoch nicht verboten folgendes zu machen:

$$\begin{aligned} 2x &= 6 \quad | \cdot 3 \\ 6x &= 18 \end{aligned}$$

Damit haben wir zwar nicht das Ergebnis, aber wenn wir die Gleichung auflösen kommt trotzdem $x = 3$ dabei raus. Das heißt, dass man mit beliebigen Zahlen mal nehmen und teilen darf (außer der 0).

1.1.2 Addition von Gleichungen

Wir nehmen mal an, dass wir folgendes einfaches Gleichungssystem haben:

$$a + b = 3 \tag{1}$$
$$a + 2b = 5 \tag{2}$$

Obwohl es die Spannung nimmt, sei an dieser Stelle verraten, dass $a = 1$ und $b = 2$ ist. Auf die Ergebnisse können wir mit den uns bekannten Lösungsvefahren kommen.
Jetzt addieren wir Gleicungen (1) und (2). Wie soll das gehen? Wir addieren die beiden Seiten der Gleichungen. Hier sieht das wie folgt aus:

$$\begin{array}{ccccccccc} & a+b & & & = & 3 & & \\ & & & a+2b & = & & & 5 \\ \hline \Rightarrow & (a+b) & + & (a+2b) & = & 3 & + & 5 \end{array}$$

Die letzte Zeile können wir zusammenfassen und erhalten:

$$2a + 3b = 8 \tag{3}$$

Was bringt uns das nun? In diesem Fall nur eine Erkenntnis. Wenn wir uns die Lösungen noch einmal anschauen ($a = 1, b = 2$) und diese in (3) einsetzen, dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} 2a + 3b &= 8 \quad | \quad a = 1 \text{ und } b = 2 \text{ einsetzen} \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 &= 8 \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

Somit bleibt die neue Gleichung für die Lösung des Gleichungs noch immer richtig! Das heißt wir dürfen Gleichungen addieren! Das Gleiche gilt übrigens auch für die Subtraktion.
Jetzt subtrahieren wir einfach mal die Gleichungen:

$$\begin{array}{ccccccccc} & a+b & & & = & 3 & & \\ & & & a+2b & = & & & 5 \\ \hline \Rightarrow & (a+b) & - & (a+2b) & = & 3 & - & 5 \end{array}$$

Sieht noch nicht großartig anders aus, wenn wir jedoch die letzte Zeile ausrechnen, erhalten wir:

$$\begin{array}{rcll} (a+b) -\}a+2b & = & 3-5 & \mid \text{ Klammern auflösen} \\ a+b-a-2b & = & -2 & \mid \ a \text{ und } b \text{ zusammenrechnen} \\ -b & = & -2 & \mid \ \cdot(-1) \\ b & = & 2 & \end{array}$$

Jetzt haben wir schon nach einer Variablen des Gleichungssystemsaufgelöst und das nur durch Subtraktion der Gleichungen. Dies ist schon die Grundlage des Additionsverfahrens ....

Weiterführende Informationen
Alle die wissen möchten, warum man die Gleichungen so einfach subtrahieren darf, werden dies jetzt erfahren.
Man kann die Gleichungen (1) und (2) wie folgt aufschreiben:

$$a+b-3 = 0 \quad (1)$$
$$a+2b-5 = 0 \quad (2)$$

Da wir auf der rechten Seite jeweils 0 stehen haben, können wir die Gleichungen gleichsetzen:

$$\begin{array}{rcll} a+b-3 & = & a+2b-5 & \mid \ +3 \\ a+b & = & a+2b-2 & \mid \ -(a+2b) \\ -b & = & -2 & \end{array}$$

Die Addition zweier Gleichungen begründet man genauso, jedoch multipliziert man vorher eine Gleichung mit (-1).

1.2 Das Verfahren

Die obigen Erkenntnisse können wir zum Lösen von Gleichungssystemen einsetzen. Nehmen wir uns einfach mal ein Gleichungssystem zur Hand:

$$3x+4y = 31 \quad (1)$$
$$6x-y = 26 \quad (2)$$

Unser Ziel ist es vor einer der Variablen (sprich x oder y) den gleichen Koeffizienten stehen zu haben (Koeffizient = die Zahl die vor der Variablen steht). *Eine*

Möglichkeit dieses zu erreichen ist, die Gleichung (1) mit 2 zu multiplizieren. Machen wir das mal:

$$\begin{array}{rcll} 3x+4y & = & 31 & \mid \cdot 2 \\ 6x+8y & = & 62 & \end{array}$$

Schreiben wir das ganze Gleichungssytem mit der mit zwei multiplizierten ersten Gleichung mal auf:

$$6x+8y = 62 \tag{1}$$
$$6x-y = 26 \tag{2}$$

Jetzt können wir Gleichung (2) von (1) subtrahieren. Das ist sinnvoll, denn $6x-6x=0$ und somit steht nur noch irgendetwas mit y da...

$$\begin{array}{cccccccc} & 6x+8y & & & = & 62 & & \\ - & & & (6x-y) & = & & & 26 \\ \hline \Rightarrow & (6x-6x) & + & (8y-(-y)) & = & 62 & - & 26 \end{array}$$

Und somit:

$$\begin{array}{rcll} 9y & = & 36 & \mid \ :9 \\ y & = & 4 & \end{array}$$

Wenn wir das in eine der Gleichungen des Gleichungssystems einsetzen erhalten wir den Wert für x. Nehmen wir mal Gleichung (2):

$$\begin{array}{rcll} 6x-y & = & 26 & \mid \ 4 \text{ für } y \text{ einsetzen} \\ 6x-4 & = & 26 & \mid \ +4 \\ 6x & = & 30 & \mid \ :6 \\ x & = & 5 & \end{array}$$

Somit haben wir ein Ergebnis ermittelt. Was kommt jetzt? Richtig! Die Probe, jedoch bleibt diese diesmal dem Leser überlassen.

R

Faustregel
Nicht jeder erkennt einen „intelligenten“ Faktor sofort, oder es gibt keinen schönen Faktor. In dieser Situation gibt es einen ganz einfachen Trick. Man sucht sich eine Variable aus, nach der man auflösen will. Danach multiplizert man die zweite Gleichung mit dem Koeffizienten, der vor der Variablen der ersten Gleichung steht. Die erste Gleichung multipliziert man in gleicher Weise mit dem Koeffizienten der vor der Variablen der zweiten Gleichung stand, bevor man sie multipliziert hat.
In dem obigen Beispiel würde das bedeuten, dass man die erste Gleichung mit 6 und die zweite Gleichung mit 3 multipliziert.