# 1 Lineare Gleichungssysteme

Wenn man in der Schule an den Punkt der lineare Gleichungssysteme kommt, hat man normale Gleichungen und deren Umformungen schon behandelt. Und das nicht ohne Grund, denn die Umformung von Gleichungen ist eine Grundlage, die man für Gleichungssysteme beherrschen sollte.

**Weiterführende Informationen**
Vielleicht erstmal eine Anmerkung zum Titel, was in der Schule meistens als *Gleichungssysteme* bezeichnet wird, sind *lineare Gleichungssysteme*. Im Folgenden werden wir den Ausdruck lineare(s) Gleichungssytem(e) verwenden.

Wer beim Lesen dieses Dokuments über die Umformungen stolpert, sollte das entsprechende Dokument über Äquivalenzumformungen lesen (z.Z. in Arbeit und noch nicht verfügbar).

## 1.1 Was ist ein lineares Gleichungssystem?

Bislang haben wir uns mit Gleichungen der Form $3x+5 = 8$ beschäftigt. Soll heißen, dass wir eine unbekannte Variable hatten (im Beispiel $x$). Diese Gleichung hat eine eindeutige Lösung. Es gibt also keine zwei Zahlen, die diese Gleichung erfüllen. In diesem Beispiel ist die einzige Lösung $x = 1$.
Jetzt beschäftigen wir uns mit Gleichungen der Form:

$$3x + 4y = 9 \tag{1}$$
$$2x + y = 1 \tag{2}$$

Was ist das?! $x$ und $y$, das sind ja zwei unbekannte Variablen! Und dafür haben wir auch noch zwei Gleichungen! Das sieht ja nach mindestens doppelter Arbeit aus! – Ja, das ist es auch, aber es ist auch nicht mehr als die doppelte Arbeit!
Es ist üblich die Gleichungen zu nummerieren, dem aufmerksamen Leser, wird schon (1) und (2) aufgefallen sein. Dies ist in diesem Text die Nummerierung für die Gleichungen.
Jetzt ist es an der Zeit zu sagen, was ein Gleichungssystem ist:

**Begriff Gleichungssystem**
Sobald wir mehrere Gleichungen haben, die zusammen gehören, sprechen wir von einem Gleichungssystem.

Was heißt, dass die Gleichungen zusammengehören? Dies bedeutet nicht nur, dass diese Gleichungen im Schulbuch nebeneinander, oder untereinander stehen, nein, es gibt auch einen mathematischen Zusammenhang. Und zwar haben die Variablen in allen Gleichungssytemen die gleiche Bedeutung – oh je, was heißt das schon wieder? Wenn wir ein $x$ und ein $y$ als Lösung errechnet haben, dann muss man das Ergebnis in alle Gleichungen einsetzen können und es muss stimmen. Also, wenn wir eine Probe machen, ob das Ergebnis richtig ist, dann muss die Probe für alle Gleichungen funktionieren!

Okay, das war jetzt sehr theoretisch. Machen wir es doch nochmal an unserem tollen Beispiel:
Betrachten wir nochmal die Gleichung (1): $3x + 4y = 9$. Folgende Werte wären eine Lösung für diese Gleichung: $x = 3$ und $y = 0$. Kurze Probe: $3 \cdot 3 + 4 \cdot 0 = 9$ und ausgerechnet: $9 = 9$. Oh, wie schön, das löst unsere Gleichung (1). Aber halt! Unsere Probe ist noch nicht zu ende! Wir müssen das gesamte noch mit Gleichung (2) prüfen. Wie war die Gleichung noch gleich? Ach ja, $2x + y = 1$. Setzen wir doch mal die Werte für $x$ und $y$ ein: $2 \cdot 3 + 0 = 1$. Sieht komisch aus, aber rechnen wir das mal aus: $6 = 1$. Nein, da schlug unsere Probe fehl, denn $6 \neq 1$.
Ich werde an dieser Stelle schon verraten, dass die Lösung für das Gleichungssystem $x = (-1)$ und $y = 3$ ist. Machen wir an dieser Stelle doch gleich mal die Probe:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 &= 9 \\ (-3) + 12 &= 9 \\ 9 &= 9 \end{aligned}$$

Das sieht ja schonmal vielversprechend aus, jetzt noch die Probe für die zweite Gleichung:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-1) + 3 &= 1 \\ (-2) + 3 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Wie wir sehen, ist dieses Ergebnis in der Tat eine Lösung! Bevor wir uns weiter mit linearen Gleichnungssystemen beschäftigen, sollten wir uns folgende Regel notieren!

R

**Faustregel**
Ziel des lösens eines linearen Gleichungssystems ist es, Lösungen zu finden, die für alle Gleichungen gelten!
Sobald wir ein Ergebnis für das lineare Gleichungssystem ermittelt haben, müssen wir zum Überprüfen die Probe für alle Gleichungen machen! Es genügt nicht nur die Ergenbnisse in eine Gleichung einzusetzen.

An dieser Stelle haben wir uns den Begriff Gleichungssystem sehr genau angeschaut, jedoch haben wir den Begriff *linear* fast vollständig ignoriert. Damit beschäftigen wir uns im Folgenden:

### 1.1.1 Beispiele für lineare Gleichungssysteme

Wann nennt man ein Gleichungssystem ein lineares Gleichungssytem? An dieser Stelle verzichte ich auf die mathematische Definition – für alle, die jetzt Angst haben, dass die Definition ganz wegfällt, sei auf die weiterführenden Informationen verwiesen.
Das obige Beispiel zeigt ein lineares Gleichungssystem. Dies kann natürlich auch

mehr als zwei Variablen haben, zum Beispiel so:

$$3x + 4y - 2z = 15 \tag{1}$$
$$2x - 4y + 5z = 15 \tag{2}$$
$$2x + y + z = 15 \tag{3}$$

Na gut, aber was sind jetzt *keine* linearen Gleichungssysteme? Folgende Gleichungssysteme sind nicht linear:

### 1.1.2 Beispiel 1 für ein nichtlineares Gleichungssystem

$$x + y = 5 \tag{1}$$
$$xy = 6 \tag{2}$$

Dieses Gleichungssystem ist nicht linear, denn Gleichung (2) ist nicht linear. Denn sie enthält ein $x \cdot y$.

### 1.1.3 Beispiel 2 für ein nichtlineares Gleichungssystem

$$x^2 + y = 30 \tag{1}$$
$$x + y = 10 \tag{2}$$

Dieses Gleichungssystem ist nicht linear, weil Gleichung (1) nicht linear ist. Denn diese Gleichung enthält ein $x^2$.

R

**Faustregel**
Eine Gleichung kann als linear bezeichnet werden, wenn die Variablen nur in „einfacher Form“ vorkommen. Soll heißen, dass ein $x^2$, $xy$, $2^x$ oder $\sin x$ (wer „sin“ nicht kennt, der sollte sich auch nicht wundern …). Natürlich gibt es noch viele weitere Beispiele für nichtlineare Gleichungen. Ein Gleichungssystem heißt linear, wenn *alle Gleichungen* linear sind.

Und an dieser Stelle kommt der versprochende Ausblick auf die offizielle Definition von linear.

i

**Weiterführende Informationen**
Eine Gleichung heißt linear, wenn sie folgende Struktur erfüllt:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Diese Formel will ich nicht unkommentiert stehen lassen. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $b$ sind Konstanten. Das heißt, dass die Werte gegeben sind. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind die Variablen. Statt $x_1, x_2$ kann man auch $x, y, \ldots$ sagen. Jedoch wird diese Bezeichnung bei mehr als 26 Variablen schwierig.

Die weitaus schwerere Frage ist, wie kann man diese Systeme lösen? Und kann man sie immer lösen? Sind die Lösungen immer eindeutig, oder gibt es mehrere Lösungen?

## 1.2 Wie löst man lineare Gleichungssysteme?

Es gibt verschiedene Wege ein Gleichungssystem zu lösen. Wir werden uns mit folgenden Lösungsmethoden näher beschäftigen:

- Gleichsetzungsverfahren
- Einsetzungsverfahren
- Additions- / Subtraktionsverfahren (Gaußsches Eleminationsverefahren)

Jedem Verfahren wird ein eigenes Dokument gewidmet. An dieser Stelle möchte ich die Verfahren aber nicht ganz unkommentiert stehen lassen. In der Schule beginnt man meistens mit dem *Gleichsetzungsverfahren*, wie wir später sehen werden, ist das nur eine spezielle Variante des *Einsetzungsvefahrens*. In der Praxis und in der Oberstufe ist das *Gaußsche Elememinationsverfahren* die wichtigste Methode.

**Weiterführende Informationen**
In der Praxis finden häufig die sogenannten *iterativen Methoden* eine Anwendung. Diese sind für einen Computer schnell zu berechnen, jedoch sind die errechneten Lösungen nur Näherungen an die wirkliche Lösung. Für das ausrechnen mit Papier und Bleistift sind diese Methoden nicht zu empfehlen (zumindest bei der Gleichungssystemsgröße, die wir verwenden).

## 1.3 Die lieben Lösungen...

Die Frage *„Wie löst man ein lineares Gleichungssystem?“* kann jeder Schüler noch verstehen und hat sie sich auch bestimmt schon selber gestellt. Die anderen beiden Fragen, ob immer eine Lösung existiert und ob es mehrere Lösungen gibt, wird jeder Mathematiker sofort stellen, jedoch kein Schüler ...
Dennoch werde ich an dieser Stelle ein kurzes Wort dazu verlieren. Nein, lineare Gleichungssysteme sind nicht immer lösbar und nein, es muss auch nicht immer nur eine Lösung existieren.
In den entsprechenden Dokumenten werden wir uns an gegebener Stelle damit beschäftigen. Es sei jedoch dazu gesagt, dass man in der Sekundarstufe I in der Regel von genau einer Lösung ausgehen kann.

**Weiterführende Informationen**
In der höheren Mathematik wird das vorhanden sein von mindestens einer Lösung als *Existenz* bezeichnet. Wenn es nur eine Lösung gibt, wird das als *Eindeutigkeit* bezeichnet. In der höheren Mathematik sind die Fragen nach der Existenz und der Eindeutigkeit oftmals wichtiger als die Lösungsmethode, oder die Lösung selber!

## 1.4 Motivation

Wir kennen sie doch, diese Aufgaben *„Fritzchen kauft an zwei Tagen Äpfel und Birnen zum gleichen Stückpreis. Am ersten Tag hat er fünf Birnen und*

*vier Äpfel gekauft. Er hat dafür 3,30 Eur bezahlt. Am zweiten Tag hat er für zwei Birnen und drei Äpfel 1,60 Eur bezahlt. Wieviel kostet ein Apfel, bzw eine Birne?"*.
Ja, diese Aufgaben sind in der Tat für Schüler entworfen und haben mit dem eigentlichen Einsatz von Gleichungssystemen nicht viel gemeinsam.
Die größten Computer, die im Einsatz sind, werden für wissenschaftliche Zwecke genutzt. Zum Beispiel zum Simulieren der Stabilität einer Brücke, oder zum berechnen von Erdbeben. 80% der Zeit, die diese Computer für die Berechnung brauchen, wird für das Lösen von Gleichungssystemen eingesetzt!
Ja, auch Privatcomputer haben viel mit Gleichungssystemen zu tun. Die Berechnung von Schnittpunkten zweier Geraden, Ebenen, Würfeln und so weiter benötigt Gleichungssysteme. Somit sind moderne 3D-Grafikkarten damit beschäftigt, ständig solche Gleichungssyteme zu lösen! Ja, auch das Codieren in das MP3-Format ist eine spezielle Form des Gleichungssystemlösens. Ach ja, auch Handys lösen ständig Gleichungssysteme! Gleichungssysteme begleiten uns täglich in unserem Leben, ohne das wir dies merken. Vielleicht haben sie es alleine schon deswegen verdient, ein bisschen Aufmerksamkeit zu bekommen.