1 Das Einsetzungsverfahren

Es wird empfohlen, das Dokument über das Gleichsetzungsverfahren gelesen zu haben, bevor dieses Dokument gelesen wird.
Zur Erklärung dieses Verfahrens benutzen wir das gleiche lineare Gleichungssystem wie beim Gleichsetzungsverfahren.

$$\begin{aligned} x+y &= 9 \qquad (1) \\ 2x+y &= 13 \qquad (2) \end{aligned}$$

1.1 Das Verfahren

Beim Gleichsetzungsverfahren haben wir *alle* Gleichungen nach einer Variable unserer Wahl umgestellt. Hier stellen wir nur *eine* Gleichung unserer Wahl nach einer Variablen unserer Wahl um.
Nehmen wir doch einfach die Gleichung (1) und stellen sie nach y um. Wie gesagt, die Wahl ist willkürlich, wir können sowohl die Gleichung, als auch die Variable frei wählen. Aber hier die Umformung von Gleichung (1) nach y:

$$\begin{aligned} x+y &= 9 \qquad | \ -x \\ y &= 9-x \end{aligned}$$

Jetzt wissen wir was y ist. Auch wenn wir den Wert von x nicht kennen, aber y können wir zu jedem x bestimmen (einfacher gesagt: gibt man uns eine Zahl für x, so können wir diese einsetzen und erhalten eine Zahl für y). Wie am Anfang schon gesagt: Die Variablen bedeuten in allen Gleichungen das Gleiche! Somit können wir $9-x$ in Gleichung (2) für y einsetzen. Machen wir das auch gleich:

$$\begin{aligned} 2x+y &= 13 \qquad | \ \text{für } y \ 9-x \text{ einsetzen} \\ 2x+(\underbrace{9-x}_{\text{eingesetzt}}) &= 13 \end{aligned}$$

Jetzt haben wir eine Gleichung mit einer Unbekannten. Diese Situation haben wir ja schon im Gleichsetzungsverfahren kennengelernt. Wie geht es weiter? Genau! Wir formen die Gleichung nach x um:

$$\begin{aligned} 2x+(9-x) &= 13 \qquad | \ \text{Die Klammern können wir hier weglassen} \\ 2x+9-x &= 13 \qquad | \ \text{wir können } x \text{ zusammenrechnen} \\ x+9 &= 13 \qquad | \ -9 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Viola! Jetzt haben wir schon unser Ergebnis für x! Jetzt kommt das gleiche Schema wie beim Gleichsetzungsverfahren. Wir setzen diesen Wert in eine der Gleichungen des Gleichungssystems ein, und lösen diese nach y auf. Wählen wir mal Gleichung (1):

$$\begin{aligned} x+y &= 9 \qquad | \ x=4 \\ 4+y &= 9 \qquad | \ -4 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Die Probe

Auch wenn es nervig ist, aber nach dem Lösen einer Gleichung sollten wir das Ergebnis überprüfen. So auch hier.
Probe für Gleichung (1):

$$\begin{aligned} x+y &= 9 \quad |x=4 \text{ und } y=5 \\ 4+5 &= 9 \\ 9 &= 9 \end{aligned}$$

Für die erste Gleichung stimmt das Ergebnis schonmal. Jetz überprüfen wir noch die zweite Gleichung:

$$\begin{aligned} 2x+y &= 13 \quad | \quad x=4 \text{ und } y=5 \\ 2\cdot 4+5 &= 13 \\ 13 &= 13 \end{aligned}$$

Das Ergebnis stimmt auch für die zweite Gleichung! Somit haben wir das richtige Ergebnis recht schnell gefunden.

Schwierigkeit beim Einsetzungsverfahren

Wie wir im ersten Beispiel gesehen haben, ist das Einsetzungsverfahren recht unkompliziert. Hat es wirklich nur Vorteile gegenüber dem Gleichsetzungsverfahren? Die Antwort lautet leider „Nein“. Ein kleines Detail, welches nicht auffiel, haben wir vernachlässigt. Bei dem Einsetzen haben wir folgendes eingesetzt: $(9-x)$. Wir haben jedoch noch kein Wort zu den Klammern verloren. In diesem einfachen Beispiel hätten wir diese auch weglassen können, aber es ist besser sie immer beim Einsetzen zu setzen.
Die Schwierigkeit machen wir uns an dem Beispiel klar. Und zwar stellen wir jetzt Gleichung (1) nach x um:

$$\begin{aligned} x+y &= 9 \quad | \quad -y \\ x &= 9-y \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir das wieder in Gleichung (2) ein:

$$\begin{aligned} 2x+y &= 13 \quad | \quad \text{für } x \ 9-y \text{ einsetzen} \\ 2(\underbrace{9-y}_{\text{eingesetzt}})+y &= 13 \end{aligned}$$

Hier ist der Haken, die Gleichung sieht schon komplizierter aus, aber lösen wir diese mal auf:

$$\begin{aligned} 2(9-y)+y &= 13 \quad | \quad \text{Etwas schöner schreiben} \ldots \\ 2\cdot(9-y)+y &= 13 \quad | \quad \text{Klammern auflösen!} \\ 2\cdot 9-2y+y &= 13 \quad | \quad \text{Wir können jetzt etwas zusammenrechnen} \\ 18-2y+y &= 13 \quad | \quad y \text{ können wir auch noch zusammenrechnen} \\ 18-y &= 13 \quad | \quad -18 \\ -y &= -5 \quad | \quad \cdot(-1) \\ y &= 5 \end{aligned}$$

An dieser Stelle werden wir nicht erneut x ausrechnen, da wir x durch einsetzen erhalten – Das haben wir weiter oben schonmal gemacht. Die Probe haben wir

oben auch schon für diese Werte durchgeführt. Somit müssen wir diese auch nicht mehr machen.
Wie wir sehen, erfordert das Einsetzungsverfahren nach den Einsetzen einiges an Umformungarbeit. Bei dem Gleichsetzungsverfahren mussten wir zwei Gleichungen umformen; hier liegt die Umformungsarbeit in einer Gleichung. Somit erfordert dieses Verfahren einen geschulteren Umgang im Klammernauflösen und Vorzeichenbeachten! Jedoch kann dieses Verfahren sehr schnell zum Ziel führen, wie wir oben gesehen haben.
Eines sollten wir uns auf jeden Fall merken:

R

Faustregel
Sobald wir eine Gleichung in eine andere einsetzen, sollten wir das Eingesetzte in Klammern setzen! Die Klammern müssen anschließen aufgelöst werden und die Gleichung sollte vereinfacht werden!

1.2 Mehrere Unbekannte – ein größeres Beispiel

Die Vorgehensweise um ein Gleichungssystem mit mehreren Unbekannten zu lösen, ist ähnlich dem Vorgehen, wie wir es bei dem Gleichsetzungsverfahren angewendet haben. Auch hier führen wir das Gleichungssystem auf eines mit weniger Variablen zurück (in diesem Fall von 3 auf 2 Variablen).
Betrachten wir uns mal folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -x+y+3z &= 30 \quad (1)\\ x+y-z &= 0 \quad (2)\\ 2x-3y+4z &= 24 \quad (3) \end{aligned}$$

Wir nehmen uns jetzt eine Gleichung und stellen diese nach einer Variablen unserer Wahl um. Am cleversten währe wahrscheinlich Gleichung (2) nach z umzustellen. Jedoch handelt man nicht immer clever, deshalb nehmen wir das erst beste. (Okay, der wahre Grund ist, dass wir uns ans Ausklammern gewöhnen müssen. Der kürzeste Weg ist deshalb die schlechtere Wahl.) Wir stellen Gleichung (1) nach x um:

$$\begin{aligned} -x+y+3z &= 30 && \mid +x\\ y+3z &= 30+x && \mid -30\\ y+3z-30 &= x \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir das gewonnende x in die anderen beiden Gleichungen ein. Also in (2) und (3). Setzen wir das nun erstmal in Gleichung (2) ein:

$$\begin{aligned} x+y-z &= 0 && \mid \text{einsetzen von } y+3z-30 \text{ für } x\\ (y+3z-30)+y-z &= 0 && \mid \text{auflösen der Klammern}\\ y+3z+-30+y-z &= 0 && \mid y \text{ können wir zusammenrechnen}\\ 2y+3z-z-30 &= 0 && \mid z \text{ können wir zusammenrechnen}\\ 2y+2z-30 &= 0 && \mid +30\\ 2y+2z &= 30 \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir unser errechnetes x (zur Erinnerung $x = y + 3z - 30$) in die Gleichung (3) ein:

$$\begin{aligned}
2x - 3y + 4z &= 24 & &| \text{ einsetzen von } y + 3z - 30 \text{ für } x \\
2(y + 3z - 30) - 3y + 4z &= 24 & &| \text{ Klammern auflösen – aufpassen!} \\
\underbrace{2 \cdot y + 2 \cdot 3z - 2 \cdot 30}_{\text{aufgelöste Klammer}} - 3y + 4z &= 24 & &| \text{ die Multiplikationen ausrechnen} \\
2y + 6z - 60 - 3y + 4z &= 24 & &| \text{ } y \text{ können wir zusammenrechnen} \\
-y + 6z - 60 + 4z &= 24 & &| \text{ } z \text{ können wir zusammenrechnen} \\
-y + 10z - 60 &= 24 & &| +60 \\
-y + 10z &= 84
\end{aligned}$$

Jetzt haben wir auch die zweite Gleichung gewonnen. Somit können wir jetzt wieder ein kleineres Gleichungssystem aus den beiden neuen Gleichungen bilden:

$$2y + 2z = 30 \tag{4}$$
$$-y + 10z = 84 \tag{5}$$

Dieses lineare Gleichungssystem lösen wir wieder mit dem Einsetzungsverfahren. Wir nehmen die Gleichung (4) und lösen diese nach y auf. (Hier wäre cleverer gewesen Gleichung (5) nach y aufzulösen). Machen wir uns an die Arbeit:

$$\begin{aligned}
2y + 2z &= 30 & &| -2z \\
2y &= 30 - 2z & &| :2 \\
y &= \tfrac{30-2z}{2} \\
y &= 15 - z
\end{aligned}$$

Nun setzen wir das mal in Gleichung (5) ein:

$$\begin{aligned}
-y + 10z &= 84 & &| \text{ einsetzen von } 15 - z \text{ für } y \\
-(15 - z) + 10z &= 84 & &| \text{ Klammern auflösen – Achtung minus!} \\
\underbrace{-15 + z}_{\text{Vorzeichenwechsel!}} \quad +10z &= 84 & &| \text{ } z \text{ können wir zusammenrechnen} \\
-15 + 11z &= 84 & &| +15 \\
11z &= 99 & &| :11 \\
z &= 9
\end{aligned}$$

Herzlichen Glückwunsch zum ermittelten z! Jetzt fehlen uns noch x und y. Für y können wir die umgeformte Gleichung von oben nehmen, nämlich: $y = 15 - z$. Setzen wir das mal ein:

$$\begin{aligned}
y &= 15 - z & &| \text{ 9 für } z \text{ einsetzen} \\
y &= 15 - 9 \\
y &= 6
\end{aligned}$$

So schnell haben wir den Wert für y bekommen. Ist es nicht schön zu sehen, wie wir bereits vorher getätigte Arbeit hier benutzen können? Bevor wir uns auf den Lorbeeren ausruhen, sollten wir noch x bestimmen! Dazu können wir ebenfalls eine Gleichung von oben benutzen, und zwar: $x = y + 3z - 30$. Setzen wir doch mal die Werte ein:

$$\begin{aligned}
x &= y + 3z - 30 & &| \text{ } y = 6 \text{ und } z = 9 \text{ einsetzen} \\
x &= 6 + 3 \cdot 9 - 30 & &| \text{ nur noch einfaches rechnen} \\
x &= 6 + 27 - 30 \\
x &= 3
\end{aligned}$$

Somit haben wir alle drei Werte bestimmt:

$$x = 3 \qquad y = 6 \qquad z = 9$$

Fehlt noch etwas? Aber sicher! Die Probe sollten wir noch machen!

Probe

Probe für die Gleichung (1):

$$\begin{array}{rcll} -x + y + 3z &=& 30 & \mid \quad x = 3 \quad y = 6 \quad z = 9 \text{ einsetzen} \\ -3 + 6 + 3 \cdot 9 &=& 30 & \\ -3 + 6 + 27 &=& 30 & \\ 30 &=& 30 & \end{array}$$

Für die erste Gleichung stimmt unsere Lösung! Überprüfen wir noch die Gleichung (2):

$$\begin{array}{rcll} x + y - z &=& 0 & \mid \quad 3 \quad y = 6 \quad z = 9 \text{ einsetzen} \\ 3 + 6 - 9 &=& 0 & \\ 0 &=& 0 & \end{array}$$

Das macht Hoffnung, denn für die zweite Gleichung stimmt es auch! Fehlt nur noch Gleichung (3):

$$\begin{array}{rcll} 2x - 3y + 4z &=& 24 & \mid \quad 3 \quad y = 6 \quad z = 9 \text{ einsetzen} \\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot 6 + 4 \cdot 9 &=& 24 & \\ 6 - 18 + 36 &=& 24 & \\ 24 &=& 24 & \end{array}$$

Somit stimmt unsere Lösung! Bevor wir das feiern sollten wir uns notieren, was wir gemacht haben!

Lösen eines linearen Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren

Faustregel
Zum Lösen eines linearen Gleichungssystems mit dem Einsetzungsverfahren, machen wir folgende Schritte:

1. Wir suchen uns eine beliebige Gleichung aus, und stellen diese nach einer Variablen unserer Wahl um.
2. Die umgestellte Gleichung setzen wir in alle anderen Gleichungen ein. Dadurch erhalten wir ein neues lineares Gleichungssystem, welches eine Variable weniger hat, als das, was wir vorher hatten.
3. Wenn noch mehr als eine Gleichung übrig ist, beginnen wir für das neue Gleichungssystem wieder bei Schritt 1.
4. Die eine Gleichung können wir in bekannter Weise lösen. Das erhaltene Ergebnis, setzen wir in die Gleichung ein, die wir zuvor umgestellt haben. Somit erhalten wir die nächste Variable. Die beiden bekannten Variablen können wir in die Gleichung einsetzen, die wir davor umgestellt haben, usw.
5. Wenn wir alle Variablen erhalten haben, sollten wir die Probe machen.